Procesamiento Digital de Señales

Dr. Marco Negrete

Facultad de Ingeniería, UNAM

Semestre 2023-1

Presentación del curso

Objetivo general:

- El alumno clasificará los conceptos y técnicas básicas del procesamiento digital de señales (PDS) mediante sus aplicaciones.

Objetivos particulares:

- El alumno identificará las diversas áreas de ingeniería donde se aplica el PDS
- El alumno analizará los fundamentos del PDS para abordar aplicaciones más complicadas
- El alumno diseñará filtros digitales que se utilizan en aplicaciones de PDS
- El alumno construirá aplicaciones para señales de voz
- El alumno analizará la arquitectura de un procesador de señales digitales (DSP) revisando el hardware de diferentes marcas y familias

Tipo: Teórica
Seriación obligatoria: Ninguna

Ubicación en el plan de estudios

Contenido

1. Introducción
2. Principios fundamentales del DSP
3. Diseño de filtros digitales
4. Aplicaciones del PDS
5. Arquitecturas para PDS

Bibliografía recomendada:

- `https://drive.google.com/drive/folders/1hgaj0Rl6LdUuEJSQIUti9nL0pewSI7bb?usp=sharing`

Evaluación

Rubros a evaluar:

Exámenes	50 %
Tareas	50 %
Proyecto	10 %

El examen final se exenta con 6.0. Si un alumno con calificación aprobatoria presenta el examen final, se entiende que renuncia a su calificación y el examen final contará el 100 %.

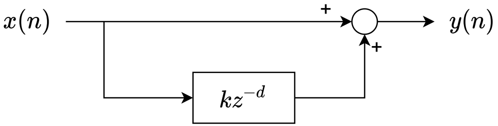
Todo comportamiento antiético causará una calificación de 5.0

El PDS y sus aplicaciones

- Procesamiento de señales de audio
  - Efectos como reverberancia, eco, ecualización, coro, distorsión.
  - Cancelación activa de ruido
  - Ajuste de volumen
  - Separación de fuentes
  - Localización
- Compresión de audio, imágenes y video.
- Procesamiento digital de imágenes
  - Disminución de ruido, balance de brillo y contraste.
  - Extracción de características
  - Clasificación
  - Reconocimiento de patrones
- Reconocimiento de voz
  - Modelos Ocultos de Markov
  - Redes neuronales
- Radares, sonares
- Sismología
- Medicina: imagenología

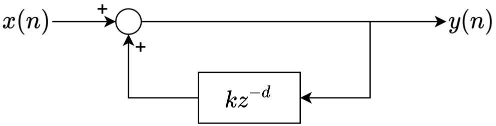
Effectos de audio

Echo



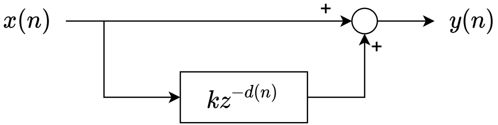
$d > 100ms$

Reverb



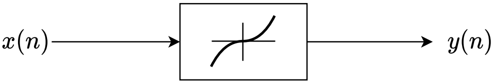
$d < 20ms$

Flanging



$d = f(n)$

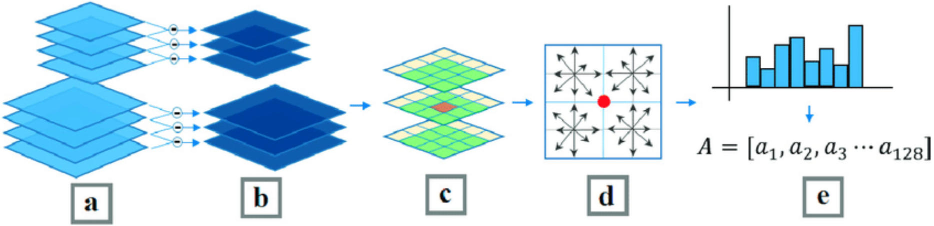
Distortion

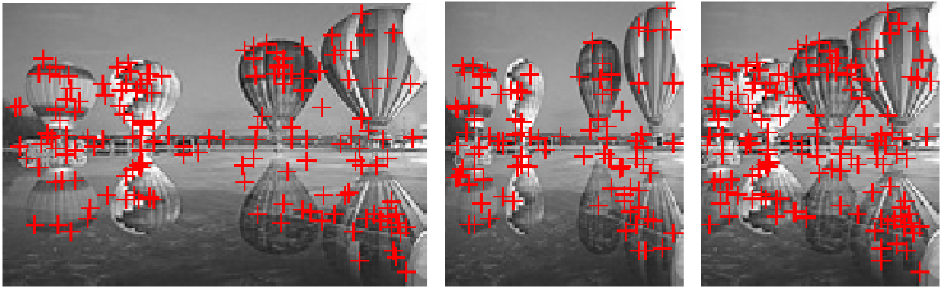


$$y = \frac{x}{|x|}\left(1 - e^{kx^2/|x|}\right)$$

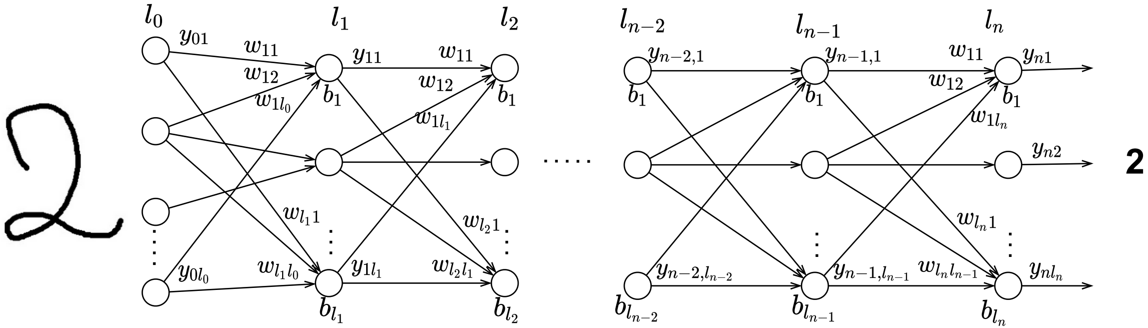
Filtrado y detección de bordes.

Reconocimiento de patrones mediante extracción de características.



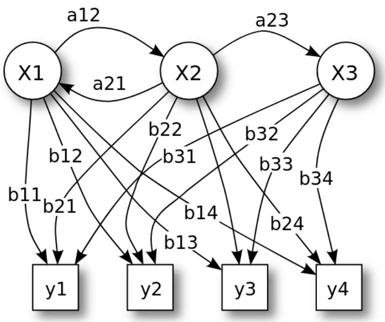


Reconocimiento de patrones mediante redes neuronales artificiales.

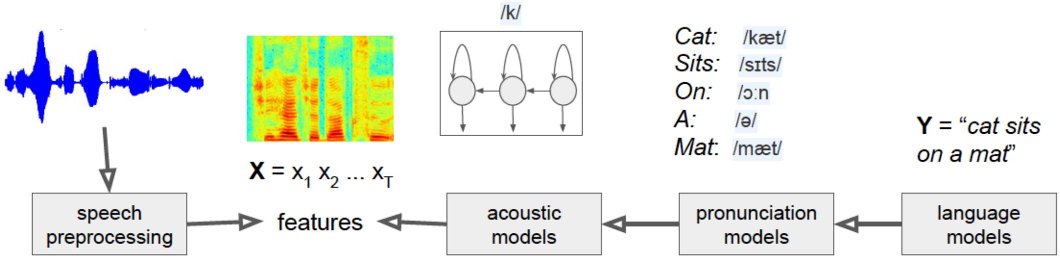


$W_1 \in R^{l_1 \times l_0}$ $\quad$ $W_2 \in R^{l_2 \times l_1}$ $\quad$ $W_n \in R^{l_{n-1} \times l_{n-2}}$ $\quad$ $W_n \in R^{l_n \times l_{n-1}}$

$B_1 \in R^{l_1}$ $\quad$ $B_2 \in R^{l_2}$ $\quad$ $B_n \in R^{l_{n-1}}$ $\quad$ $B_n \in R^{l_n}$



Reconocimiento de voz mediante Modelos Ocultos de Markov



Ventajas del PDS sobre el analógico

Ventajas:

- El procesamiento analógico requiere de dispositivos analógicos: amplificadores operacionales, transistores, elementos lineales pasivos, etc.
- Si se desea cambiar el procesamiento, es necesario cambiar el hardware
- En el caso del PDS, basta con reprogramar el dispositivo
- Además, las señales digitales son fácilmente almacenables sin que se deterioren

Desventajas:

- Debido al muestreo, el PDS está limitado en banda.
- Se requiere de convertidores ADC y DAC para que funcionen.

Señales

Señal: Cualquier magnitud física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Matemáticamente es un mapeo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Notación de señales:

- Notación analítica
- Tabla
- Secuencia de valores
- Gráfica

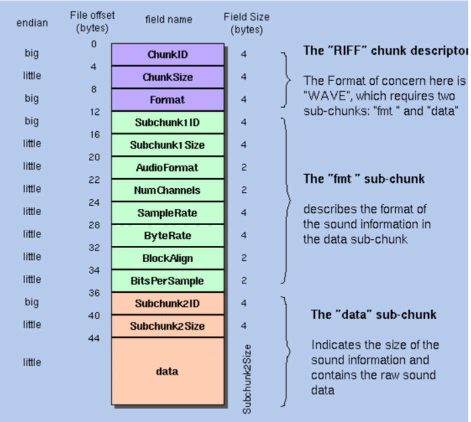
Notación analítica: la señal se puede expresar de manera precisa mediante una función matemática.

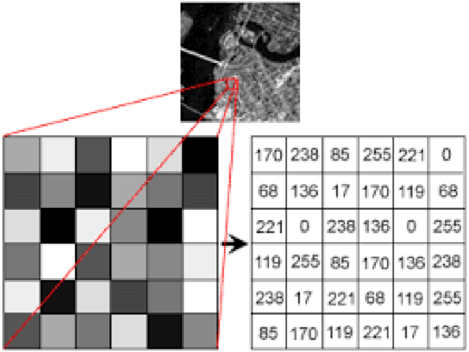
- Caso continuo: $x(t) = 0.5e^{-2t}\sin(\omega_1 t)u(t-2)$
- Caso discreto: $x(n) = 0.5\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-2) + \delta(n)$

Notación de señales

Tablas: Solo es posible en señales discretas. Es la forma en que se almacena la información en dispositivos digitales.

- Una señal de audio es una secuencia de muestras (ejemplo con Audacity)
- Una imagen es un arreglo bidimensional de valores de intensidad de luz
- La mayoría de las señales naturales se expresan así (voz, EEG, imágenes, video, música, sismógrafos)





Notación de señales

Secuencia de valores: También solo es posible en señales discretas. Muy similar a la notación mediante tablas.

- Generalmente se subraya el valor que corresponde a $n = 0$, ejemplo: $x(n) = \{3, 1, 4, \underline{1}, 5, 9, 2, 6\}$
- Si no se indica otra cosa, el primer valor corresponde a $n = 0$

Como una gráfica:

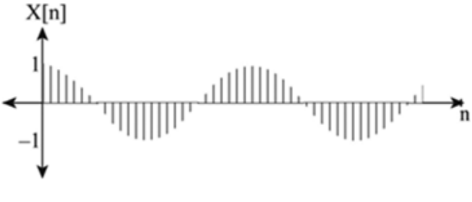
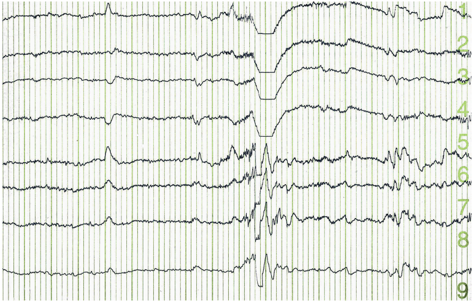
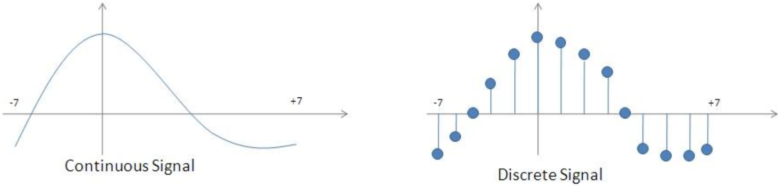


Figure 1



Una forma de clasificar las señales es dependiendo de si están definidas o no en todo instante.

- Si una señal está definida para cualquier valor $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ se dice que es una señal **continua**.
- Si la señal solo está definida en instantes específicos del tiempo, se dice que es **discreta**.



Aunque estos instantes de tiempo no tiene que ser equidistantes, generalmente sí lo son, es decir, comúnmente las señales discretas están definidas sólo para instantes de tiempo que son múltiplos enteros de un tiempo fundamental T llamado periodo.

- Para facilitar la representación de este tipo de señales, sin pérdida de generalidad, se considera $T = 1$ y por lo tanto se puede considerar que las señales discretas tienen un dominio en $t \in \mathbb{Z}$.

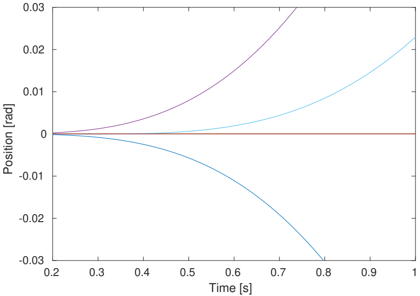
Clasificación de Señales

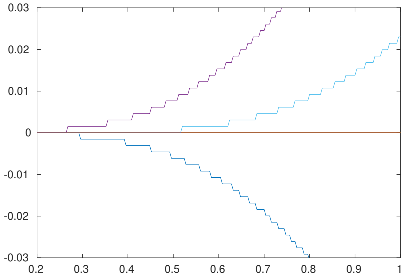
- Ejemplo de cómo se ve una señal de audio usando Audacity.
- Hacer zoom para ver las muestras

Clasificación de Señales

Otra forma de clasificar las señales es **analógicas** vs **digitales**.

- Una señal analógica es aquella en el que el codominio de la función que la representa son los números reales, es decir, la señal toma cualquier valor en un cierto intervalo.
- Una señal digital toma sólo ciertos valores en el codominio, dichos valores generalmente se obtienen por un proceso de *cuantización*.





- Cuando la señal se puede describir mediante una expresión matemática explícita, una tabla de datos o una regla bien definida, se dice que la señal es **determinística**, esto es, los valores presentes o pasados de la señal se conocen de manera precisa y sin incertidumbre.
- El caso contrario son las señales **aleatorias**, en las que el valor de la señal no se conoce con precisión. Este tipo de señales se describen mediante distribuciones de probabilidad.

Clasificación de Señales

Otra forma de clasificar las señales es **unidimensionales** vs **multidimensionales** y **de un canal** vs **multicanal**.

Señales periódicas

Se dice que una señal discreta $x(n)$ es periódica si:

$$\exists T \quad | \quad x(n+kT) = x(n) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- El valor entero T se conoce como periodo.
- El valor T más pequeño posible se conoce como periodo fundamental.

La definición para señales continuas es la misma, sin embargo, mientras que para una senoidal continua $x(t) = A\sin(2\pi ft + \phi)$, la señal $x(t)$ es periódica para cualquier frecuencia f, en el caso discreto, una señal senoidal $x(n) = A\sin(2\pi fn + \phi)$ es periódica si y sólo si **la frecuencia f es un número racional**

Ejemplos:

- $x(n) = 3\sin(6\pi n)$ se puede expresar como $3\sin((2\pi)(3)n)$, por lo que $f = 3 \in \mathbb{Q}$, por lo tanto, $x(n)$ es una señal periódica.
- $x(n) = 2\sin(2n+1)$ se puede expresar como $2\sin(2\pi\frac{1}{\pi}n+1)$, por lo que $f = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, por lo tanto, $x(n)$ **no** es una señal periódica.

Señales periódicas

En el caso discreto, las señales senoidales con frecuencias ω separadas 2π, son idénticas, es decir, todas las señales

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta) \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

con

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \qquad\qquad -\pi \leq \omega_0 \leq \pi$$

son idénticas. De lo anterior se puede deducir que la frecuencia de oscilación más alta de una señal discreta se da cuando

$$\omega = \pi \qquad\qquad \text{o bien} \qquad\qquad f = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, en el caso discreto **el espectro de frecuencias de una señal discreta es periódico, con periodo 2π.**

Cuando se hace un análisis en frecuencia de una señal discreta, siempre se maneja el intervalo de **frecuencias normalizadas** $[-\pi, \pi]$.

Señales periódicas

Para determinar el periodo de una señal discreta, se pueden seguir los pasos:

1. Obtener la frecuencia f de la señal (recuerde la relación $\omega = 2\pi f$)
2. Expresar f como el cociente de dos enteros $f = \frac{a}{b}$
3. Cancelar todos los factores comunes de a y b hasta que a y b sean primos relativos, es decir que su máximo común divisor sea 1
4. El periodo de la señal es b

El teorema de muestreo

Sea una señal analógica $x_a(t)$ limitada en banda. Si la frecuencia máxima contenida en $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y se aplica un muestreo con frecuencia $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras mediante la función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$$

es decir, $x_a(t)$ se puede expresar como

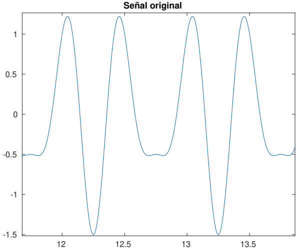
$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

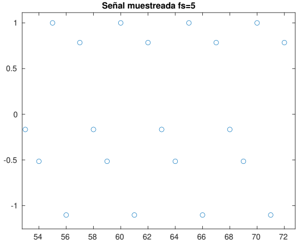
donde $x_a(n/F_s) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$.

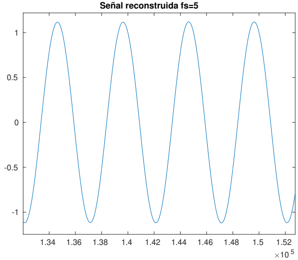
- Ejemplo de cómo se reconstruye una señal usando las funciones de interpolación.
- Ejemplo de porqué audio se muestrea a 44100 Hz.
- Otros ejemplos de muestreo
- Qué pasa si muestreo en cruces por cero.
- En la práctica conviene muestrear a mucho más del doble.

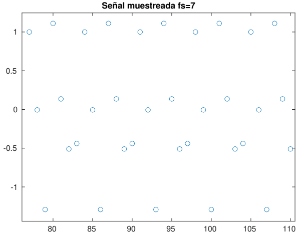
Ejemplo de muestreo

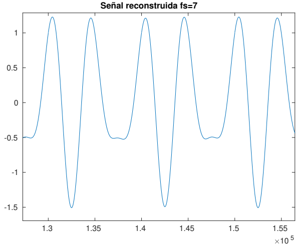
Señal continua $x(t) = \cos(4\pi t) + 0.5\sin(6\pi t)$











Conversión analógico-digital

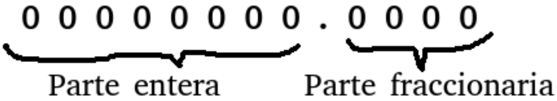
La mayoría de las señales en la naturaleza son analógicas, por lo que es necesario convertirlas a señales digitales. Este proceso lleva, en general, tres pasos:

- Muestreo: se toman valores de la señal continua solo en ciertos instantes de tiempo nT donde T es el periodo de muestreo.
- Cuantización: conversión de los valores de la señal (valores continuos) a un conjunto finito de valores.
- Codificación: cada valor convertido se expresa como una secuencia binaria de b bits.

Las formas más usadas de codificación son los formatos de punto fijo y punto flotante.

Formato de punto fijo

La aritmética de punto fijo se refiere a una representación en la que el número de bits para la parte entera y para la parte decimal, es fijo. Ejemplo:



El número más grande que se puede representar es 255.9375 y el número más pequeño es 2^{-4}. El número de bits necesarios se puede obtener mediante:

$$b = \left\lfloor \log_2 \frac{x_M - x_m}{\epsilon_x} \right\rfloor + 1$$

donde x_M es el valor máximo a representar, x_m, el valor mínimo y ϵ_x es la precisión requerida.

Formato de punto fijo

En aritmética de punto fijo, en realidad cada valor se representa como un múltiplo entero del número más pequeño que se puede representar. Los números negativos se representan mediante la notación de complemento a dos:

0 1 0 1 0 1 1 $\longrightarrow$ Número positivo
1 0 1 0 1 0 0 $\longrightarrow$ Negación lógica
1 0 1 0 1 0 1 $\longrightarrow$ Negado + 1 = Complemento a dos

Formato IEEE754

En este formato, el número se representa como una cantidad en el intervalo $[1, 2)$ multiplicada por una potencia de 2. Ejemplos:

Decimal	Binario	Forma exponencial
1.0	1.0	1.0×2^{0}
255.75	11111111.11	$1.111111111 \times 2^{111}$
0.625	0.101	1.01×2^{-1}
-0.203125	-0.001101	-1.101×2^{-11}

Formato IEEE754

En el formato IEEE754 se utiliza una parte de la palabra para representar el exponente, otra para la mantisa y se usa el bit más significativo para el signo:

32 - bits

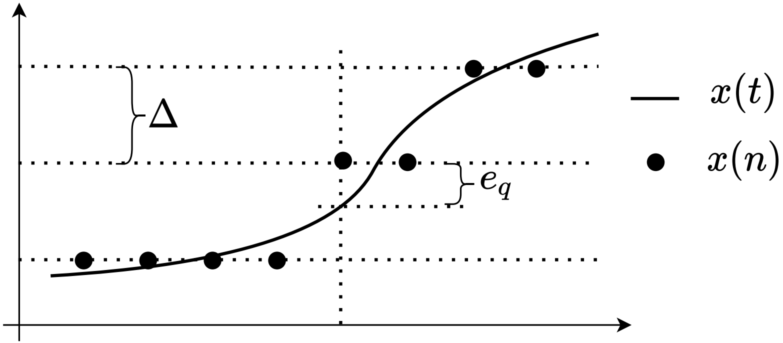
31	30 ... 23	22 ... 0
+ 0 **- 1**	**Exp + 127**	**Mantisa**

64 - bits

63	62 ... 52	51 ... 0
+ 0 **- 1**	**Exp + 1023**	**Mantisa**

- En este formato se utiliza el exponente sesgado de modo que todos los exponentes representables sean positivos.
- El ∞ se representa con un exponente sesgado lleno de unos, signo en 0 y mantisa en 0.
- El $-\infty$ se representa con un exponente sesgado lleno de unos, signo en 1 y mantisa en 0.
- El *NaN* (Not a Number) se representa un signo en cualquier valor, exponente sesgado lleno de unos y mantisa $\neq 0$.

El ruido de cuantización e_q es el error que se produce por la conversión A/D de una señal:



- e_q es la diferencia entre el valor de la señal analógica en el tiempo $t = nT$ y la señal digital.
- Δ es la diferencia mínima entre un valor y otro de la señal cuantizada y está determinado por el número de bits disponibles.
- Los valores que puede tomar e_q están en el intervalo $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$

Una forma de medir la calidad de un ADC es mediante la Tasa de Señal-Ruido de Cuantización (*Signal Quantization Noise Ratio*). Esta tasa se calcula mediante el cociente de la potencia media de la señal analógica y la potencia media del ruido de cuantización. Suponga una señal analógica

$$x(t) = A \sin \omega t$$

Su potencia media está dada por:

$$P_x = \frac{A^2}{2}$$

Si suponemos que el ruido de cuantización es una señal aleatoria que se distrubuye uniformemente:

$$e_q \sim U\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right) \qquad\qquad p(e_q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si} \quad e_q \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la potencia media se puede calcular como:

$$P_q = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q^2 p(e_q) de_q = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e_q^2 \frac{1}{\Delta} de_q = \frac{1}{\Delta} \frac{e_q^3}{3}\Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{1}{\Delta}\frac{(\Delta/2)^3}{3} - \frac{1}{\Delta}\frac{(-\Delta/2)^3}{3} = \frac{\Delta^2}{12}$$

SQNR

Para una señal $x(t) = A \sin \omega t$ que se cuantiza utilizando b bits se tiene que

$$\Delta = \frac{2A}{2^b}$$

Por lo que:

$$P_q = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\frac{4A^2}{2^{2b}}}{12} = \frac{1}{3}\frac{A^2}{2^{2b}}$$

Por lo tanto, el SQNR está dado por:

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{1}{3}\frac{A^2}{2^{2b}}} = \frac{3}{2}2^{2b}$$

Es más frecuente utilizar este valor en dB:

$$SQNR(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}2^{2b}\right) = 10\log_{10}\frac{3}{2} + (2b)10\log_{10}2$$

$$SQNR(dB) = 1.76 + 6.02b$$

Señales discretas básicas

El **impulso unitario** es una señal que se define como

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El **escalón unitario** se denota como $u(n)$ y vale:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función **rampa unitaria** se denota como $r(n)$ y vale:

$$r(n) = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El escalón unitario se puede obtener con la suma acumulada del impulso unitario. A su vez, el impulso unitario se puede obtener del escalón mediante la primera diferencia.

Señales discretas básicas

La **secuencia geométrica** es una señal dada por:

$$x(n) = a^n$$

Aunque la señal está definida para toda n, generalmente se utiliza multiplicada por un escalón unitario:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la secuencia geométrica, si la base $|a| > 1$, entonces $|x(n)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si $|a| < 1$, entonces la señal $x(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Las señales **seno amortiguado** y **coseno amortiguado** se definen como:

$$x(n) = a^n \sin \omega n \qquad\qquad x(n) = a^n \cos \omega n$$

Y también suelen utilizarse multiplicadas por un escalón unitario. Estas funciones son importantes porque generalmente forman parte de las respuestas de sistemas lineales.

Señales de energía y de potencia

La **energía** de una señal se define como:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Si se cumple que $0 < E < \infty$, se dice que $x(n)$ es una **señal de energía**. Algunas señales pueden tener energía infinita, pero potencia media finita. La potencia media P se define como:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Es decir, es la energía de una señal a lo largo de un intervalo dividida entre el tamaño del intervalo, cuando éste tiende a infinito. Si la energía E es finita, entonces $P = 0$. Si $E \to \infty$, entonces P puede ser finita o infinita. Si $0 < P < \infty$, entonces se dice que $x(n)$ es una **señal de potencia**.

Señales pares e impares

Una señal real $x(n)$ es **par** si

$$x(-n) = x(n)$$

Una señal real $x(n)$ es **impar** si

$$x(-n) = -x(n)$$

Las señales impares siempre cruzan por el origen.
Cualquier señal se puede descomponer como la suma de una componente par $x_e(n)$ y una impar $x_o(n)$:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

con

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \\ x_o(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \end{aligned}$$

Operaciones entre señales

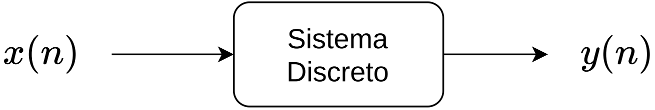
- Atraso y adelanto
- Inversión en el tiempo
- Escalamiento en el tiempo
- Suma y resta de señales
- Multiplicación por un escalar
- Multiplicación de dos señales
- Ejemplos con Matlab y archivo de audio: eco, reverberancia y distorsión.

Toda señal se puede representar como una suma de impulsos unitarios desfasados multiplicados por un escalar.

Sistemas Discretos

Un sistema discreto S es un hardware o algoritmo que opera sobre una señal llamada *señal de entrada* $x(n)$, para producir una *señal de salida* $y(n)$. Matemáticamente, un sistema es un mapeo $S : \sigma \to \sigma$, donde σ es el conjunto de todas las señales discretas:

$$y(n) = S[x(n)]$$



Descripción entrada-salida

Una forma de describir un sistema es mediante la relación que guardan la entrada con la salida. Esto se puede hacer mediante:

- Ecuación en diferencias
- Función de transferencia (se verá más adelante con la Transformada Z)

Ejemplo. Considere la señal de entrada:

$$x(n) = \begin{cases} |n| & \text{si} \quad -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad = \{\dots 0, 0, 0, 3, 2, 1, \underline{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0 \dots\}$$

¿Cuál es la salida de los siguientes sistemas?

1. $y(n) = x(n)$ (sistema identidad)
2. $y(n) = x(n-1)$ (retraso de un tiempo)
3. $y(n) = x(n+1)$ (adelanto de un tiempo)
4. $y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$ (promedio móvil)
5. $y(n) = mediana[x(n+1), x(n), x(n-1)]$ (mediana móvil)
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ (suma acumulada)

Sistemas recursivos

En los incisos 1 a 5 de la diapositiva anterior, la salida queda completamente determinada dada la entrada y el sistema. Sin embargo, en el inciso 6, sucede algo direrente. El sistema 6 se puede reescribir como:

$$y(n) = x(n) + y(n-1)$$

es decir, para determinar la salida en el tiempo n, se requiere $y(n-1)$, pero para obtener $y(n-1)$, se requiere $y(n-2)$ y así sucesivamente. En este tipo de sistemas, la salida no está unívocamente determinada por la entrada y el sistema. Se requiere además de una condición inicial $y(n_0 - 1)$ para obtener la salida para $n \geq n_0$. Ejemplo:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) + y(n-1)$$

Calcule la salida $y(n)$ si la entrada es $x(n) = nu(n)$ cuando:

1. $y(-1) = 0$
2. $y(-1) = 1$

Los sistemas cuya salida actual requiere de salidas anteriores, y por lo tanto, están unívocamente determinados solo si se conocen las condiciones iniciales, se llaman sistemas recursivos.

Sistemas estáticos y dinámicos

Un sistema es **estático** si la salida $y(n)$ solo depende de la entrada en el mismo tiempo $x(n)$ y no depende de muestras pasadas ni futuras. En cualquier otro caso, se dice que el sistema es **dinámico**. Los sistemas estáticos se representan, en general, por expresiones de la forma:

$$y(n) = S[x(n), n]$$

Ejemplos:

- $y(n) = ax(n)$
- $y(n) = nx(n) + bx^3(n)$

Si la salida $y(n)$ de un sistema dinámico se puede determinar por las entradas

$$x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)$$

con $N \geq 0$, se dice que tiene memoria de duración N.

- Si $N = 0$, el sistema es estático
- Si $0 < N < \infty$, el sistema tiene memoria finita
- Si $N = \infty$, el sistema tiene memoria infinita.

Los sistemas recursivos con sistemas con memoria infinita.

Sistemas variantes e invariantes al desfase

Un sistema es invariante ante el desfase si se cumple que:

$$\text{Si} \qquad S[x(n)] = y(n)$$

$$\text{entonces} \qquad S[x(n-k)] = y(n-k)$$

Para cualquier señal $x(n)$ y para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Si no se cumple la relación anterior, se dice que el sistema es variante ante el desfase.

Puesto que el tiempo suele ser la variable independiente más común, suelen usarse como sinónimos los términos variante e invariante con el tiempo. Sin embargo, un sistema que procesa imágenes, puede tener las mismas propiedades y se trata de un sistema donde la variable independiente de las señales son coordenadas espaciales (x, y).

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si cumple con homogeneidad y aditividad.

- **Homogeneidad:** $S[ax(n)] = aS[x(n)]$
- **Aditividad:** $S[x_1(n) + x_2(n)] = S[x_1(n)] + S[x_2(n)]$

Ambas propiedades se pueden expresar como:

$$S[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1S[x_1(n)] + a_2S[x_2(n)]$$

y se conoce como principio de superposición.

Sistemas causales y no causales

Un sistema discreto es **causal**, si la salida $y(n)$ se puede obtener conociendo solo la entrada actual $x(n)$ y entradas anteriores, pero no depende de entradas futuras. Es decir, la salida $y(n)$ satisface una expresión de la forma:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots]$$

donde $F[\cdot]$ es una función cualquiera, que puede ser no lineal.

Si la condición anterior no se cumple, se dice que el sistema es **no causal**.

La caudalidad de un sistema también se puede definir por su respuesta al impulso o por su función de transferencia, conceptos que se verán más adelante.

Sistemas estables e inestables

Un sistema discreto es *BIBO estable* (Bounded Input - Bounded Output), si toda entrada acotada, produce una salida acotada. Es decir:

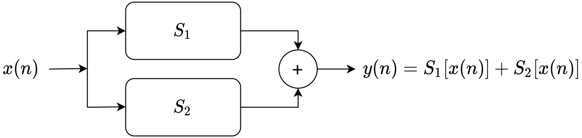
$$\begin{array}{rcccc} \text{Si} & \exists M_x & | & |x(n)| \leq M_x < \infty & \forall n \\ \text{Entonces} & \exists M_y & | & |y(n)| \leq M_y < \infty & \forall n \end{array}$$

Si la condición anterior no se cumple, es decir, si existe al menos una $x(n)$ acotada que produce una salida $y(n)$ no acotada, entonces el sistema es inestable.

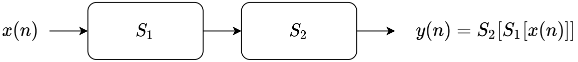
Interconexión de sistemas discretos

Los sitemas discretos se pueden interconectar para formar sistemas más complejos. Las dos formas de interconexión son:

- Conexión en paralelo:



- Conexión en cascada:



En general, en la conexión en cascada, el orden de los sistemas importa, es decir:

$$S_1[S_2[x(n)]] \neq S_2[S_1[x(n)]]$$

Sin embargo, en el caso de sistemas lineales e invariantes al desfase, el orden no importa y

$$S_1[S_2[x(n)]] = S_2[S_1[x(n)]]$$

Ejemplos de clasificación de sistemas

Análisis de SLID

Este curso se centrará en el anális de Sistemas Lineales e Invariantes ante el Desfase. Existen dos métodos para analizar la respuesta de un SLID:

- Resolución directa de la ecuación entrada-salida, que en general tiene la forma:

$$y(n) =$$

- Descomponer la señal de entrada en una suma de señales elementales
  - La forma más general es descomponer la entrada $x(n)$ en una suma impulsos

$$x(n) = \sum_k a_k \delta(n-k)$$

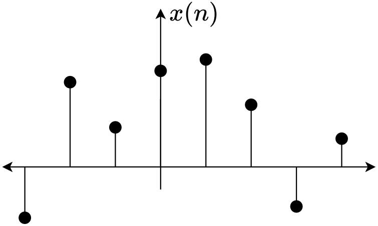
  - Aunque, si la señal es periódica, otra posible forma es como una suma de exponenciales

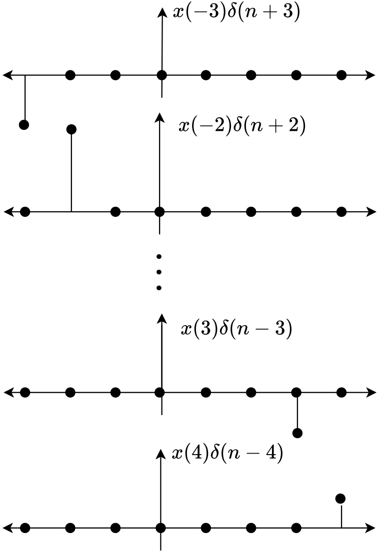
$$x(n) = \sum_k c_k e^{j\omega_k n}$$

Si se conoce la salida $y_k(n)$ para las entradas elementales $x_k(n)$, se puede aplicar el principio de superposición y la invarianza al desfase para obtener la salida $y(n)$ como una combinación lineal de las salidas desfasadas $y_k(n-m)$.

Descomposición en tren de impulsos

Toda señal discreta se puede expresar como una suma de impulsos desfasados y multiplicados por un escalar:





$$x(n) = \cdots + x(-3)\delta(n+3) + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n-1) + \\ x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3)\ldots$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Respuesta al impulso

- Es la señal de salida de un sistema cuando la entrada es un impulso unitario.
- Aunque esta respuesta se puede obtener para cualquier sistema, su utilidad se da en el análisis de SLID
- Es importante porque conociendo la respuesta al impulso de un sistema SLID, se puede conocer la salida ante cualquier otra señal de entrada, aplicando las propiedades de linealidad e invarianza ante el desfase.
- Es decir, un SLID se puede caracterizar por completo conociendo su respuesta al impulso

Salida de un SLID

Suponiendo que la respuesta al impulso es

$$h(n) = \{\dots \quad h_{-3} \quad h_{-2} \quad h_{-1} \quad \underline{h_0} \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \dots\}$$

Suponiendo una señal de entrada

$$x(n) = \{\dots \quad x_{-3} \quad x_{-2} \quad x_{-1} \quad \underline{x_0} \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots\}$$

La señal de entrada $x(n)$ se puede expresar como una suma de impulsos:

$$x(n) = \dots + x_{-3}\delta(n+3) + x_{-2}\delta(n+2) + x_{-1}\delta(n+1) + x_0\delta(n) + x_1\delta(n-1) + x_2\delta(n-2) + x_3\delta(n-3) + \dots$$

Y puesto que el sistema es lineal e invariante ante el desfase, la salida $y(n)$ se puede calcular como

$$y(n) = \dots + x_{-3}h(n+3) + x_{-2}h(n+2) + x_{-1}h(n+1) + x_0h(n) + x_1h(n-1) + x_2h(n-2) + x_3h(n-3) + \dots$$

Salida de un SLID

Expandiendo las operaciones:

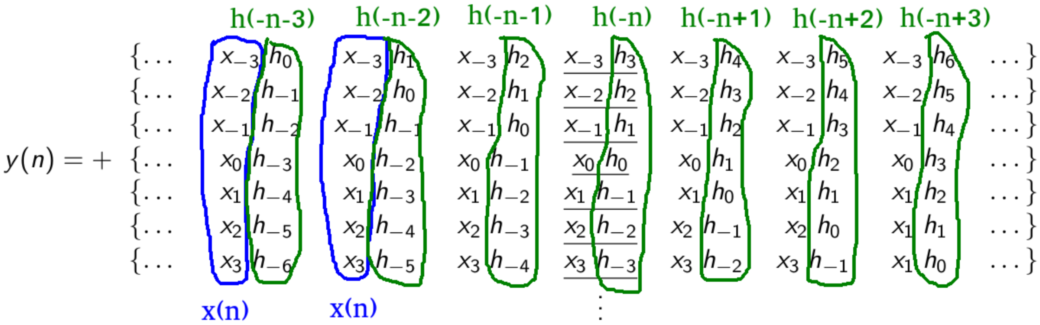
$$
y(n) = + \begin{array}{lccccccccl}
 & & & & & \vdots & & & & \\
\{\dots & x_{-3}h_{-3} & x_{-3}h_{-2} & x_{-3}h_{-1} & x_{-3}h_{0} & x_{-3}h_{1} & x_{-3}h_{2} & \underline{x_{-3}h_{3}} & \dots\} \\
\{\dots & x_{-2}h_{-3} & x_{-2}h_{-2} & x_{-2}h_{-1} & x_{-2}h_{0} & x_{-2}h_{1} & \underline{x_{-2}h_{2}} & x_{-2}h_{3} & \dots\} \\
\{\dots & x_{-1}h_{-3} & x_{-1}h_{-2} & x_{-1}h_{-1} & x_{-1}h_{0} & \underline{x_{-1}h_{1}} & x_{-1}h_{2} & x_{-1}h_{3} & \dots\} \\
\{\dots & x_{0}h_{-3} & x_{0}h_{-2} & x_{0}h_{-1} & \underline{x_{0}h_{0}} & x_{0}h_{1} & x_{0}h_{2} & x_{0}h_{3} & \dots\} \\
\{\dots & x_{1}h_{-3} & x_{1}h_{-2} & \underline{x_{1}h_{-1}} & x_{1}h_{0} & x_{1}h_{1} & x_{1}h_{2} & x_{1}h_{3} & \dots\} \\
\{\dots & x_{2}h_{-3} & \underline{x_{2}h_{-2}} & x_{2}h_{-1} & x_{2}h_{0} & x_{2}h_{1} & x_{2}h_{2} & x_{2}h_{3} & \dots\} \\
\{\dots & \underline{x_{3}h_{-3}} & x_{3}h_{-2} & x_{3}h_{-1} & x_{3}h_{0} & x_{3}h_{1} & x_{3}h_{2} & x_{3}h_{3} & \dots\} \\
 & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Salida de un SLID

Alineando los tiempos:

$$
y(n) = + \begin{array}{lccccccccl}
 & & & & \vdots & & & & & \\
\{\ldots & x_{-3}\,h_0 & x_{-3}\,h_1 & x_{-3}\,h_2 & \underline{x_{-3}\,h_3} & x_{-3}\,h_4 & x_{-3}\,h_5 & x_{-3}\,h_6 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_{-2}\,h_{-1} & x_{-2}\,h_0 & x_{-2}\,h_1 & \underline{x_{-2}\,h_2} & x_{-2}\,h_3 & x_{-2}\,h_4 & x_{-2}\,h_5 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_{-1}\,h_{-2} & x_{-1}\,h_{-1} & x_{-1}\,h_0 & \underline{x_{-1}\,h_1} & x_{-1}\,h_2 & x_{-1}\,h_3 & x_{-1}\,h_4 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_0\,h_{-3} & x_0\,h_{-2} & x_0\,h_{-1} & \underline{x_0\,h_0} & x_0\,h_1 & x_0\,h_2 & x_0\,h_3 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_1\,h_{-4} & x_1\,h_{-3} & x_1\,h_{-2} & \underline{x_1\,h_{-1}} & x_1\,h_0 & x_1\,h_1 & x_1\,h_2 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_2\,h_{-5} & x_2\,h_{-4} & x_2\,h_{-3} & \underline{x_2\,h_{-2}} & x_2\,h_{-1} & x_2\,h_0 & x_1\,h_1 & \ldots\} \\
\{\ldots & x_3\,h_{-6} & x_3\,h_{-5} & x_3\,h_{-4} & \underline{x_3\,h_{-3}} & x_3\,h_{-2} & x_3\,h_{-1} & x_1\,h_0 & \ldots\} \\
 & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Convolución



De la figura anterior se puede observar que la salida se puede calcular como:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

La operación anterior se conoce como **convolución** y se denota con el símbolo *

La salida de un SLID ante cualquier entrada se puede calcular mediante la convolución de la entrada con la respuesta al impulso.

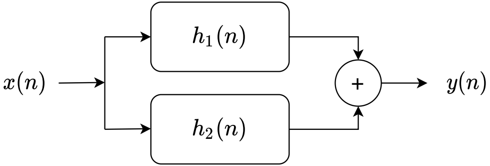
Propiedades de la convolución

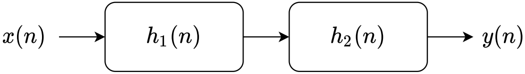
- Impulso como elemento idéntico $x(n) * \delta(n) = x(n)$
- Desplazamiento $x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$
- Conmutatividad $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$
- Asociatividad $(x(n) * h1_(n)) * h_2(n) = x(n)(h_1(n) * h_2(n))$
- Distributividad $x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

Interconexión de SLID

Los sitemas discretos se pueden interconectar para formar sistemas más complejos. Las dos formas de interconexión son:

Conexión en paralelo:





$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$y(n) = x(n) * (h_1(n) + h_2(n))$$

$$h_{eq}(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

$$y(n) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$$

Aplicando propiedad asociativa:

$$y(n) = x(n) * (h_1(n) * h_2(n))$$

$$h_{eq}(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

SLID Causales

Suponiendo que calculamos la salida de un SLID en un tiempo $n = n_0$:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

Separando la suma anterior en dos sumas parciales, una para los valores de $x(n)$ anteriores a n_0 (incluyendo n_0), y otra para valores futuros ($n > n_0$):

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) \\ &= h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + h(3)x(n_0 - 3)\dots \\ &\quad \dots + h(-4)x(n_0 + 4) + h(-3)x(n_0 + 3) + h(-2)x(n_0 + 2) + h(-1)x(n_0 + 1) \end{aligned}$$

Si la salida $y(n_0)$ solo depende valores actuales y anteriores, entonces, por necesidad, los valores de $h(n)$ en la segunda suma deben ser cero. Por lo tanto, un sistema SLID es **causal** si y solo si:

$$h(n) = 0 \qquad \forall n < 0$$

Señales causales

Extendiendo el concepto de causalidad de SLIDs, se dice que una señal $x(n)$ es causal si:

$$x(n) = 0 \qquad \forall \quad n < 0$$

Si un SLID es causal y se aplica una señal de entrada causal, entonces la salida $y(n)$ también será una señal causal.

SLID estables

Un sistema discreto es *BIBO estable* si:

$$
\begin{array}{rccl}
\text{Si} & \exists M_x & | & |x(n)| \leq M_x < \infty \quad \forall n \\
\text{Entonces} & \exists M_y & | & |y(n)| \leq M_y < \infty \quad \forall n
\end{array}
$$

Si se tiene un SLID, la salida se puede calcular como:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Tomando el valor absoluto a ambos lados de la ecuación:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

El valor absoluto de una suma, siempre es menor o igual que la suma de los valores absolutos:

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

SLID estables

Si la entrada es acotada, entonces existe M_x tal que $|x(n)| \leq M_x$. Sustituyendo en la desigualdad:

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

De la expresión anterior se puede observar que $y(n)$ estará acotada solo si la respuesta al impulso satisface que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Es decir, para que un SLID sea BIBO estable, es condición necesaria y suficiente que **la respuesta al impulso sea absolutamente sumable.**

Sistemas FIR e IIR

Se dice que un sistema es FIR (*Finite Impulse Response*) si su respuesta al impulso es cero para todo n fuera de un intervalo de duración finita M, es decir:

$$h(n) = 0 \qquad \forall n < n_0 \quad \text{y} \quad n > n_0 + M$$

En estos sistemas, la salida es simplemente una suma ponderada de las entradas actuales y anteriores. Los valores de $h(n)$ son los factores de ponderación. Estos sistemas tienen una memoria de tamaño M.

Se dice que un sistema es IIR (*Infinite Impulse Response*) si la respuesta al impulso no cumple la condición anterior. Los sistemas IIR son sistemas recursivos y de memoria infinita.

Descripción con ecuaciones en diferencias

Los SLID se pueden caracterizar por completo mediante su respuesta al impulso, sin embargo, en ocasiones es mejor describirlos mediante una ecuación en diferencias, sobre todo en el caso de sistemas IIR.

Un sistema FIR (causal) tiene una ecuación en diferencias de la forma:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \\ y(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

Un sistema IIR (causal) tiene una ecuación en diferencias de la forma:

$$\begin{aligned} y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) &= \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \\ y(n) &= -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \\ y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) \\ y(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) \\ &\quad -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \cdots - a_N y(n-N) \end{aligned}$$

Ec en diferencias con coef constantes

Las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes describen sistemas SLID. Suponga el sistema recursivo:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Si calculamos la salida a partir del tiempo cero, tenemos:

$$\begin{aligned}
y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\
y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2) \\
\vdots &= \vdots \\
y(n) &= \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}}
\end{aligned}$$

La respuesta $y(n)$ se puede dividir en dos partes:

- $y_{zi}(n) =$ Respuesta de entrada nula: la respuesta cuando la entrada $x(n) = 0$
- $y_{zs}(n) =$ Respuesta de estado cero: la respuesta cuando las condiciones iniciales son cero.

Ec en diferencias con coef constantes

- La respuesta de entrada nula es independiente de la entrada y solo depende de la naturaleza del sistema.
- La respuesta de entrada nula es cero para sistema FIR
- La respuesta de entrada nula también se conoce como respuesta libre o respuesta natural
- Se dice que un SLID está en reposo cuando todas las condiciones iniciales son cero.
- La respuesta total del sistema es la suma de la respueta de estado cero más la respuesta de entrada nula.

Solución de ecs en diferencias lineales

Resolver una EDLCC (ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes) significa hallar la función $y(n)$ que satisface la ecuación en diferencias. Por ejemplo, para la ED:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Si $x(n) = \delta(n)$, una función que satisface la ED es $y(n) = a^n u(n)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= ay(n-1) + x(n) \\ a^n u(n) &= (a)a^{n-1}u(n-1) + \delta n \\ a^n u(n) &= a^n u(n-1) + \delta n \\ a^n u(n) &= a^n u(n) \end{aligned}$$

En general, se considera que la salida $y(n)$ se puede expresar como la suma de dos señales:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- $y_h(n)$: Solución homogénea
- $y_p(n)$: Solución particular

Solución homogénea

Esta solución corresponde a la suposición de que $x(n) = 0$:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

Similar al caso continuo, suponemos que la solución es una exponencial:

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Sustituyendo en la ecuación en diferencias:

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_N\lambda^{n-N} = 0$$

Dividiendo todo entre λ^{n-N}:

$$\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$$

La ecuación anterior se conoce como polinomio característico.

Solución homogéneas

Del polinomio característico, se obtienen N raíces que pueden estar en alguno de los siguientes casos:

- Si todas las raíces son reales y diferentes, la solución homogénea tendrá la forma:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

- Si alguna de las raíces λ_1 tiene multiplicidad m, entonces la solución será de la forma:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

- Dado que los coeficientes de la ecuación en diferencias son reales, si se tienen raíces complejas, siempre se presentarán en pares complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = re^{\pm j\omega}$. La solución asociada a estas raíces tiene la forma:

$$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = r^n\left(C_1(\cos\omega n + j\sin\omega n) + C_2(\cos\omega n - j\sin\omega n)\right)$$

  Dado que la ED tiene coeficientes reales, C_1 y C_2 también serán complejos conjugados $C_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi}$. La solución homogénea con raíces complejas tiene la forma:

$$y_h(n) = 2\rho r^n\cos(\omega n + \phi) + C_3\lambda_3^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

Todos los coeficientes C_i se determinan de modo que la solución $y_h(n)$ cumpla con las condiciones iniciales.

Solución particular

La solución particular $y_p(n)$ es cualquier solución que satisfaga la ecuación en diferencias:

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Para el caso de ED lineales, se elige una $y_p(n)$ de la misma forma que la entrada:

Señal de entrada $x(n)$	Solución particular $y_p(n)$
A	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + k_1 n^{M-1} + \cdots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0 n^M + k_1 n^{M-1} + \cdots + K_M)$
$A \cos \omega_0 n$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$
$A \sin \omega_0 n$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$

La solución total de una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes está data por la suma:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

Solución de ECLCC

Ejemplo. Obtenga la salida del siguiente sistema cuando la entrada es $x(n) = u(n)$ y la condición inicial es $y(0) = 1.0$:

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

Obteniendo el polinomio característico:

$$\lambda - 0.5 = 0$$

Obtenemos la solución homogénea:

$$y_h(n) = C_1 0.5^n$$

Para la solución particular, debido a que $x(n)$ es un escalón, elegimos $y_p(n) = Ku(n)$ y resolvemos para valores de n que no hagan cero la solución, por ejemplo, para $n = 1$:

$$K - 0.5K = 1$$

$$K = 2$$

Ahora, solución total está dada por:

$$y(n) = C_1 0.5^n u(n) + 2u(n)$$

Solución de ECLCC

Resolvemos para la condición inicial:

$$y(0) = C_1 0.5^0 + 2 = 1$$

$$C_1 = -1$$

Por lo que la solución total está dada por:

$$y(n) = (2 - 0.5^n)\, u(n)$$

Evaluando para los primeros valores de $n = 0, 1, 2, 3, 4...$ obtenemos:

$$y(n) = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16} \ldots\}$$

Lo que coincide con la condición inicial dada y con la ecuación en diferencias

$$y(n) = u(n) + 0.5y(n-1)$$

Solución de ECLCC

Ejemplo. Obtenga la salida del siguiente sistema cuando la entrada es $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ y la condición inicial es $y(0) = 1.0$:

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

Obteniendo el polinomio característico:

$$\lambda - 0.5 = 0$$

Obtenemos la solución homogénea:

$$y_h(n) = C_1 0.5^n$$

Para la solución particular, debido a que $x(n)$ es una exponencial, elegimos $y_p(n) = K\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ y resolvemos para valores de n que no hagan cero la solución, por ejemplo, para $n = 1$:

$$\frac{1}{3}K - \frac{1}{2}K = \frac{1}{3}$$

$$K = -2$$

Por lo que la solución particular es $y_p(n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, la cual cumple con la ecuación en diferencias:

$$-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = x(n) \qquad \forall n > 0$$

Solución de ECLCC

También se puede encontrar con $n = 2$

$$\frac{1}{9}K - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)K = \frac{1}{9}$$

$$K = -2$$

Con $n = 0$ no se puede porque al evaluar $y(n-1)$ la salida particular propuesta se hace cero:

$$K - \frac{1}{2}(0) = 1$$

$$K = 1$$

Lo cual no cumple con la ecuación en diferencias:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \neq x(n)$$

Solución de ECLCC

Por lo que la salida está dada por:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = \left(C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right) u(n)$$

Resolvemos para la condición inicial:

$$y(0) = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 = C_1 - 2 = 1$$

$$C_1 = 3$$

Por lo tanto:

$$y(n) = \left(3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right) u(n)$$

Evaluando para los primeros valores de $n = 0, 1, 2, 3, ...$ obtenemos:

$$y(n) = \{1, \frac{5}{6}, \frac{19}{36}, \frac{65}{216}, \dots\}$$

Lo que coincide con la condición inicial dada y con la ecuación en diferencias

$$y(n) = u(n) + 0.5y(n-1)$$

Solución de ECLCC

Ejemplo. Obtenga la salida del siguiente sistema cuando la entrada es $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ y la condición inicial es $y(0) = 1.0$:

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

La solución homogénea es la misma:

$$y_h(n) = C_1 0.5^n$$

Para la solución particular proponemos $y_p(n) = K\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ y resolvemos para valores de n que no hagan cero la solución, por ejemplo, para $n = 1$:

$$\frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K = 1$$

$$0 = 1?$$

La solución se indetermina. Para $n = 2$:

$$\frac{1}{4}K - \frac{1}{4}K = 1$$

$$0 = 1?$$

También se indetermina. Y sucederá lo mismo para cualquier $n > 0$. Esto sucede porque la entrada $x(n)$ está contenida en la solución homogénea. Por lo que es necesario introducir un elemento que impida la independencia lineal:

$$y_p(n) = Kn\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Respuesta al Impulso de un SLID recursivo

La respuesta al impulso $h(n)$ de un SLID es la salida cuando al entrada $x(n) = \delta(n)$ y las condiciones iniciales son cero. En este caso, la solución particular $y_p(m) = 0$, por lo que:

$$h(n) = y_h(n)$$

con todos los coeficientes C_k calculados para satisfacer las condiciones iniciales establecidas por el impulso.

Estabilidad BIBO

Dado que la respuesta al impulso $h(n)$ se obtiene con la solución homogénea, en general, $h(n)$ tiene la forma:

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n$$

con C_k calculados de modo que satisfagan las condiciones iniciales nulas. Anteriormente se demostró que para que un SLID sea estable, $h(n)$ debe ser absolutamente sumable. Calculando la suma para la solución de la forma anterior:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |C_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n$$

Para que la suma anterior converja a un valor finito, se debe cumplir que:

$$|\lambda_k| < 1 \qquad \forall k$$

Un SLID es BIBO estable si **todas las raíces del polinomio característico están dentro del círculo unitario del plano complejo**, es decir, tienen magnitud **estrictamente menor que uno**. Si al menos una raiz está sobre o fuera del círculo unitario, entonces el sistema NO es BIBO-estable.

Correlación cruzada

La correlación cruzada es una operación muy similar a la convolución pero que sirve para determinar el grado de similitud entre dos señales. La correlación cruzada está definida como:

$$r_{xy} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

o de forma equivalente:

$$r_{xy} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n)$$

Cuando se obtiene la correlación cruzada de una señal consigo misma, se denomina autocorrelación:

$$r_{xx} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$$

o de forma equivalente:

$$r_{xx} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n+l)x(n)$$

Propiedades de la correlción

La correlación cruzada tiene varias propiedades importantes:

- La correlación cruzada NO es conmutativa: $r_{xy}(n) \neq r_{yx}(n)$
- Se puede expresar en términos de la convolución como $r_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$
- $r_{xy}(n) = r_{yx}(-n)$
- $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$ (la autocorrelación es una función par)

Suponiendo dos señales $x(n)$ e $y(n)$, ambas de energía finita:

- $r_{xx}(0) = E_x$ (la autocorrelación en el tiempo cero, es la energía de la señal)
- $|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0)$ (la autocorrelación en cualquier tiempo diferente de cero, siempre será menor o igual que la energía de la señal)
- $|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}$

Correlación cruzada normalizada

Una alternativa que es independiente de la amplitud de la señal, y solo depende de la forma de onda, es la correlación cruzada normalizada:

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}}$$

y para la autocorrelación:

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)}$$

Así, se cumple que:

$$\rho_{xy}(n) \leq 1$$

y

$$\rho_{xx}(n) \leq 1$$

Correlación de señales periódicas

Considerando dos señales de potencia $x(n)$ e $y(n)$, la correlación cruzada se define como:

$$r_{xy}(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x(k)y(k-n)$$

Y para el caso de la autocorrelación:

$$r_{xx}(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x(k)x(k-n)$$

Las ecuaciones anteriores definen los límites de promedios en intervalos que tienden a infinito. Si $x(n)$ e $y(n)$ son periódicas, entonces los promedios en un intervalo infinito son iguales a los promedios a lo largo de un periodo:

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k-n)$$

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x(k-n)$$

Una señal muestreada se puede expresar como una señal continua multiplicada por un tren de impulsos:

$$x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

donde T es el periodo de muestreo, considerado como constante. Si se aplica la Transformada de Laplace a esta señal muestreada, se obtiene:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_0^{\infty} \delta(t - nT)e^{-st}dt$$

Recordanto que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ y que $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, se tiene que:

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

Definiendo el número complejo

$$z = e^{sT}$$

Y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $T = 1$, la Transformada Z está definida como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Ejemplo: Obtener la Transformada Z del impulso unitario $x(n) = \delta(n)$

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 1$$

Ejemplo: Obtener la Transformada Z de la secuencia $x_2(n) = \{3, \underline{1}, 4, 1, 5\}$.

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = 3z^1 + 1z^0 + 4z^{-1} + 1z^{-2} + 5z^{-3} \\ &= 3z + 1 + 4z^{-1} + z^{-2} + 5z^{-3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Obtener la Transformada Z de la señal:

$$x_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$X_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

Región de Convergencia

La región de convergencia (RoC por sus siglas en inglés), son todos los valores del plano complejo Z para los cuales la suma de la TZ converge. Para las secuencias anteriores:

$X_1(z) = 1$	La suma converge para todo el plano complejo Z
$X_2(z) = 3z + 1 + 4z^{-1} + z^{-2} + 5z^{-3}$	Converge para cualquier $z \neq 0$ y $z < \infty$
$X_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$	Converge (es una suma finita) para cualquier $z \neq 0$

Región de Convergencia

Ejemplo: Calcular la TZ y la región de convergencia de la señal

$$x(n) = a^n u(n)$$

De la definición:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = a^0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

La suma anterior es una serie geométrica con base

$$\frac{a}{z}$$

Las series geométricas solo convergen si la base tiene magnitud menor que uno, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad \forall z \quad | \quad |z| > |a|$$

Por lo tanto:

$$TZ\{a^n u(n)\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad RoC : |z| > |a|$$

Región de convergencia

Determine la Transformada Z y la RoC de la siguiente señal:

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$X(z) \;=\; 1 + \left(\frac{1}{3}\right) z^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 z^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 z^{-3} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right) z^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 z^3 + \dots$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z\right)^n$$

La primera suma converge para $|z| > 1/3$ y la segunda para $|z| < 2$. Entonces:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z} - 1 \qquad \text{RoC} : \quad \frac{1}{3} < |z| < 2$$

1. Linealidad
Sea $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ y sean RoC_1 y RoC_2 sus regiones de convergencia, entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\right) z^{-n} = a_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

La región de convergencia resultante es cuando menos $RoC_1 \cap RoC_2$.

2. Escalamiento en Z
Sea $x_2(n) = a^n x_1(n)$ y sea la $RoC_1 : r_2 < |z| < r_1$, entonces:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\left(a^{-1}z\right)^{-n} = X_1(a^{-1}z) = X_1\left(\frac{z}{a}\right)$$

La región de convergencia resultante es $RoC_2 : |a|r_2 < |z| < |a|r_1$

3. Desplazamiento temporal

Sea $x_2(n) = x_1(n-k)$ con $RoC_1 : r_2 < |z| < r_1$, entonces:

$$X_2(z) = \cdots + x_2(-3)z^3 + x_2(-2)z^2 + x_2(-1)z + x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + x_2(3)z^{-3} + \ldots$$
$$= \cdots + x_1(-1-k)z^{1+k}z^{-k} + x_1(-k)z^k z^{-k} + x_1(1-k)z^{-1+k}z^{-k} + x_1(2-k)z^{-2+k}z^{-k} + \ldots$$

Definiendo $m = n - k$:

$$X_2(z) = z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) z^{-m} = z^{-k} X_1(z)$$

Con $RoC_2 = RoC_1$, excepto $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$.

4. Inversión en el tiempo

Sea $x_2(n) = x_1(-n)$ con $RoC_1 : r_2 < |z| < r_1$, entonces:

$$X_2(z) = \cdots + x_2(-3)z^3 + x_2(-2)z^2 + x_2(-1)z + x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + x_2(3)z^{-3} + \ldots$$
$$X_2(z) = \cdots + x_1(3)(z^{-1})^{-3} + x_1(2)(z^{-1})^{-2} + x_1(1)(z^{-1})^{-1} + x_1(0) + x_1(-1)(z^{-1})^1 + x_1(-2)(z^{-1})^2 + \ldots$$
$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\left(z^{-1}\right)^{-n} = X_1(z^{-1}) = X_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

Con $RoC_2 : \frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}$.

5. Diferenciación en z

Sea $x_2(n) = nx_1(n)$ con RoC_1 y RoC_2, y sean sus TZ $X_1(z)$ y $X_2(z)$, entonces:

$$\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\cdots + x_1(-2)z^2 + x_1(-1)z + x_1(0) + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + \dots\right]$$

$$= \cdots + 3x_1(-3)z^2 + 2x_1(-2)z^1 + x_1(-1) + 0 - x_1(1)z^{-2} - 2x_1(2)z^{-3} - 3x_1(3)z^{-4} - \dots$$

Multiplicando la expresión anterior por $-z$ y recordando que $x_2(n) = nx_1(n)$:

$$-z\frac{dX_1(z)}{dz} = \cdots - 3x_1(-3)z^3 - 2x_1(-2)z^2 - x_1(-1)z + 0 + x_1(1)z^{-1} + 2x_1(2)z^{-2} + 3x_1(3)z^{-3} + \dots$$

$$-z\frac{dX_1(z)}{dz} = \dots x_2(-3)z^3 + x_2(-2)z^2 + x_2(-1)z + x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + x_2(3)z^{-3} + \dots$$

$$X_2(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz}$$

con $RoC_2 = RoC_1$.

Propiedades de la TZ

6. Convolución

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con RoC_1 y RoC_2, y sea $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \right] z^{-n}$$

Intercambiando el orden de las sumas:

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-m) \right] z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)z^{-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = X_1(z)X_2(z)$$

con la RoC resultante, cuando menos $RoC_1 \cap RoC_2$.

7. Correlación

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con RoC_1 y RoC_2, y sea $x(n) = r_{12}$ (correlación cruzada), entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} r_{12}(n)z^{-n}$$

Recordando que $r_{12} = x_1(n) * x_2(-n)$, y aplicando las propiedades de convolución e inversión en el tiempo:

$$X(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

con la RoC resultante, cuando menos la intersección de la RoC de $X_1(z)$ y la RoC de $X_2(z^{-1})$.

8. Teorema del valor inicial

Sea $x(n)$ una señal causal y $X(z)$ su TZ, entonces:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \left[x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots\right]$$

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Propiedades de la TZ

9. Relación del Parseval

Esta propiedad se refiere a la energía de las señales en el dominio del tiempo y el dominio z. Sean dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con regiones de convergencia $RoC_1 : r_{1l} < |z| < r_{1u}$ y $RoC_2 : r_{2l} < |z| < r_{2u}$. Entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(z)X_2\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz$$

siempre que $r_{1l}r_{2l} < 1 < r_{1u}r_{2u}$.

TZ de funciones comunes

$x(n)$	$X(z)$	RoC
$\delta(n)$	1	Todo z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$r(n) = nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$

TZ de funciones comunes

$x(n)$	$X(z)$	RoC
$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Unicidad de la TZ

De los ejemplos anteriores se pueden observar ciertas características de la TZ:

- Las señales causales tienen regiones de convergencia fuera de un círculo de radio r
- Las señales anticausales tienen regiones de convergencia dentro de un círculo de radio r
- Se puede observar que las señales $a^n u(n)$ y $-a^n u(-n-1)$ tienen la misma expresión $X(z) = \dfrac{z}{z-a}$ y las señales $na^n u(n)$ y $-na^n u(-n-1)$ también tienen la misma expresión $X(z) = \dfrac{z}{(z-a)^2}$, sin embargo, sus regiones de convergencia son diferentes, por lo que:
- La Transformada Z está definida unívocamente por **la expresión X(z) y la RoC**, y no solo por la expresión $X(z)$.

La TZ Inversa

La expresión para la Transformada Z Inversa está dada por:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

donde C es una curva cerrada dentro de la región de convergencia de $X(z)$ y que contiene al origen.

Aunque la ecuación anterior es una expresión general para la TZI, en el análisis de sistemas lineales invariantes ante el desfase se tienen siempre transformadas $X(z)$ que son funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios.

Transformadas Z racionales

Una TZ racional es un cociente de polinomios en z de la forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Para tener potencias positivas, se pueden sacar los factores comunes:

$$X(z) = \frac{z^{-M}}{z^{-N}} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

Y obteniendo las raíces del numerador y denominador, $X(z)$ se puede expresar como un cociente de productos de monomios:

$$X(z) = G z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

Donde los valores z_k se conocen como ceros y los valores p_k se conocen como polos.

Polos y Ceros

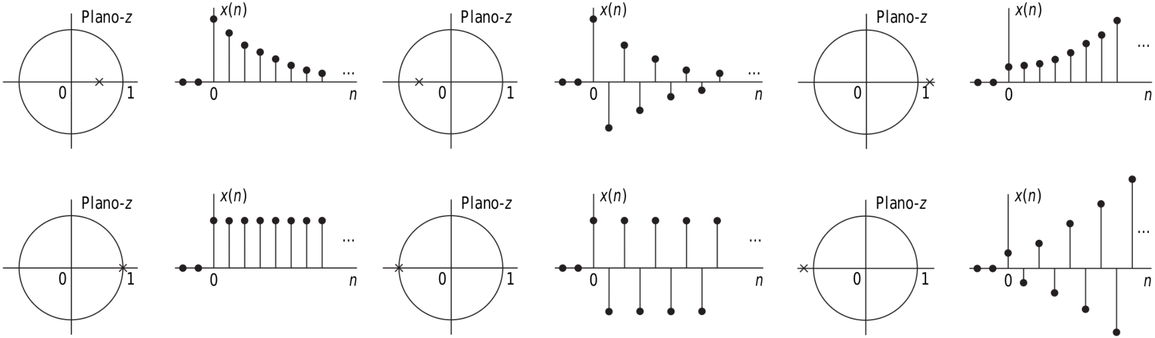
Los polos de una función $X(z)$ son todos los valores de z para los cuales $X(z) \rightarrow \infty$. Los ceros, son todos los valores para los cuales $X(z) = 0$. En el caso de una función racional

$$X(z) = Gz^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - z_k}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

los polos y ceros corresponden a las raíces del denominador y numerador, respectivamente. El término z^{N-M} introduce un cero en $z = 0$ y un polo en ∞, si $N > M$, o viceversa, si $N < M$. Sin embargo estos valores corresponden a soluciones triviales y no aportan información relevante para el comportamiento del sistema.

Ubicación de Polos

La ubicación de los polos y ceros puede dar información sobre la forma de la señal en el dominio del tiempo. Recordando que para TZ está definida por una expresión en Z y la RoC, supondremos que las expresiones en Z están asociadas con señales causales.
Si la TZ de una señal real tiene un solo polo, el polo tiene que ser real y la señal en el tiempo será una exponencial. La posición del polo determinará la forma de la señal:

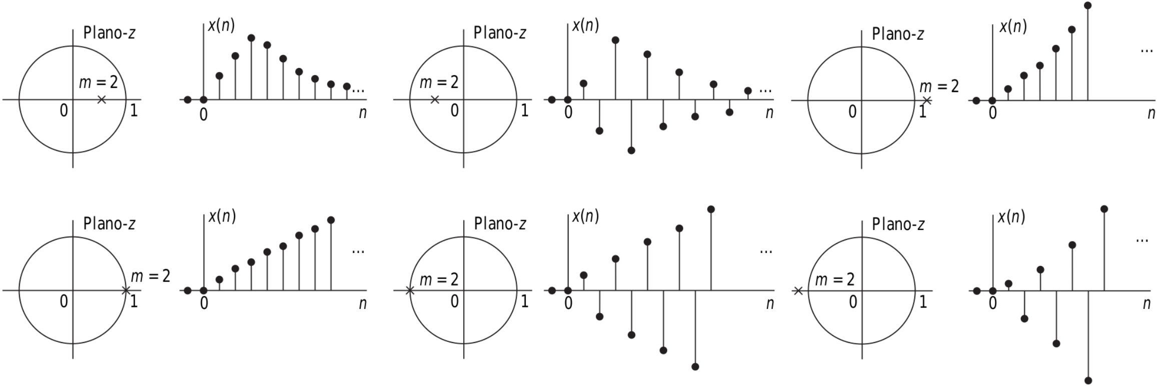


Ubicación de Polos

Si la TZ tiene un polo doble real, producirá una señal de la forma

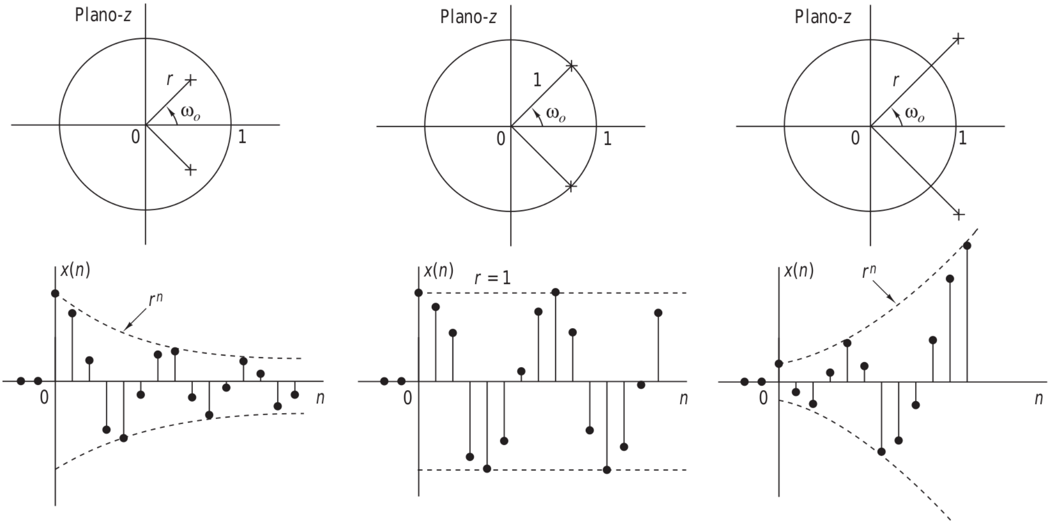
$$x(n) = na^n u(n)$$

De forma similar a un polo simple, si los polos están dentro del círculo unitario, producirán una señal acotada, y si están fuera, una señal no acotada. Sin embargo, a diferencia de un polo simple, si los polos están sobre el círculo unitario, producirán una señal no acotada.



Ubicación de Polos

Si la TZ de una señal real tiene polos complejos, estos serán conjugados. La parte real determinará si la señal es acotada o no y la parte imaginaria estará relacionada con la frecuencia de oscilación.



Estabilidad BIBO

Un sistema discreto SLID será estable si todos sus polos se encuentran **dentro del círculo unitario.** Los sistemas FIR tienen un polo múltiple en cero, por lo que **los sistemas FIR siempre son estables**

Función de transferencia de un SLID

La salida de un SLID se puede calcular mediante la convolución de la entrada con la respuesta al impulso. Aplicando propiedades de la TZ, esta relación se puede expresar como:

$$y(n) = h(n) * x(n) \longleftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

Despejando $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

El cociente anterior se conoce como **Función de Transferencia** y corresponde con la TZ de la respuesta al impulso de un SLID. La Función de Transferencia de un SLID siempre será una función racional, por lo que se aplica el análisis de la posición de polos.

La salida de un sistema se puede obtener calculando la TZ de la entrada, multiplicando por la F. de Transferencia, y luego obteniendo la TZ Inversa.

Cálculo de la TZ Inversa

La TZ Inversa se puede obtener de varias formas:

- Por integración de contorno
- Por expansión en fracciones parciales
- Por expansión en serie de potencias de z^{-i}

Debido a la naturaleza de las TZ de sistemas SLID, la expansión en fracciones parciales y el método computacional resultan mucho más sencillos que la integración de contorno.

Expansión en fracciones parciales

Consiste en expresar una función racional como la suma de varias fracciones simples de modo que su TZI se pueda obtener de tablas. En general, es más sencillo obtener la expansión en fracciones parciales de $X(z)/z$ y no de $X(z)$ directamente. Los pasos dependen de la naturaleza de los polos:

1. Caso de polos reales diferentes. En este caso, $X(z)$ se puede expandir en:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \frac{A_3}{z-p_3} + \cdots + \frac{A_N}{z-p_N}$$

Los coeficientes A_i se pueden calcular como:

$$A_i = \left.\frac{B(z)(z-p_i)}{A(z)}\right|_{z=p_i}$$

Expansión en fracciones parciales

Ejemplo. Calcule la TZI de

$$X(z) = \frac{z^3}{z^3 - \frac{13}{12}z^2 + \frac{3}{8}z - \frac{1}{24}}$$

Los polos son $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$ y $p_3 = 1/4$. Se obtiene la expansión para $X(z)/z$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{z^3 - \frac{13}{12}z^2 + \frac{3}{8}z - \frac{1}{24}} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{3}} + \frac{A_3}{z - \frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \left.\frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 6 \qquad A_2 = \left.\frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}\right|_{z=\frac{1}{3}} = -8 \qquad A_3 = \left.\frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}\right|_{z=\frac{1}{4}} = 3$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6}{z - \frac{1}{2}} - \frac{8}{z - \frac{1}{3}} + \frac{3}{z - \frac{1}{4}}$$

$$X(z) = \frac{6z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{8z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{3z}{z - \frac{1}{4}}$$

$$x(n) = \left[6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

2. Caso de polos reales repetidos con multiplicidad m. En este caso, $X(z)$ se puede expandir en:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{(z-p_1)^2} + \frac{A_3}{(z-p_1)^3} + \cdots + \frac{A_m}{(z-p_1)^m}$$

En este caso, los coeficientes A_i ya no se pueden calcular como en el caso de polos reales diferentes. La forma de obtenerlos es igualando los polinomios de los numeradores. Ejemplo: Determine la TZI de:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

Obteniendo la expansión para $X(z)/z$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2} = \frac{A_1z^2 - 2A_1z + A_1 + A_2z^2 - A_2 + A_3z + A_3}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} \longleftrightarrow x(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right] u(n)$$

Expansión en fracciones parciales

3. Caso de polos complejos conjugados. La contribución de dos polos complejos conjugados p_k, p_k^* será de la forma:

$$x(n) = [A_k(p_k)^n + A_k^*(p_k^*)^n]\, u(n)$$

A partir de la Igualdad de Euler, estos dos términos se pueden combinar para formar una señal senoidal amortiguada:

$$A_k = |A|e^{j\alpha} \qquad\qquad p_k = re^{j\beta}$$

$$x(n) = |A||r^n| \left[e^{j(\beta n+\alpha)} + e^{-j(\beta n+\alpha)}\right] u(n) = 2|A|r^n\cos(\beta n+\alpha)u(n)$$

Expansión en serie de potencias

Este método consiste en expresar $X(z)$ en una serie de potencias de la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

que converge en una RoC dada. La TZ inversa estará dada por $x(n) = c_n$. Si $X(z)$ es racional, la expansión se puede hacer dividiendo los polinomios.

Ejemplo. Determine la TZI de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

para

- RoC: $|z| > 1$
- RoC: $|z| < 0.5$

Expansión en serie de potencias

Puesto que la RoC $|z| > 1$ está fuera de un círculo, es de esperarse una señal causal. Entonces:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \frac{63}{32}z^{-5} \dots \\
\hline
1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} & 1 \\
\cline{2-2}
 & +\frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & \qquad +\frac{7}{4}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad \frac{15}{8}z^{-3} - \frac{7}{8}z^{-4} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad \frac{31}{16}z^{-4} - \frac{15}{16}z^{-5} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{63}{32}z^{-5}
\end{array}
$$

Por inspección, la TZ inversa es:

$$x(n) = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \dots\right\}$$

Expansión en serie de potencias

Para la RoC $|z| < 0.5$, dado que está dentro de un círculo, es de esperarse una señal anticausal. Entonces:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 \ldots \\ \hline
\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 & 1 \\ \cline{2-2}
 & 3z - 2z^2 \\ \cline{2-2}
 & 7z^2 - 6z^3 \\ \cline{2-2}
 & 15z^3 - 14z^4 \\ \cline{2-2}
 & 31z^4 - 30z^5
\end{array}
$$

Por inspección, la TZ inversa es:

$$x(n) = \{\ldots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, \underline{0}\}$$

Nótese que es una señal anticausal, el valor subrayado indica el valor de la señal en el tiempo $n = 0$.

Solución de ecuaciones en diferencias

La TZ y la TZI se pueden utilizar par resolver ecuaciones en diferencias que modelen sistemas discretos lineales e invariantes ante el desfase. La forma general de la ecuación en diferencias de un SLID es:

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+\cdots+a_Ny(n-N) = b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)+\cdots+b_Mx(n-M)$$

Aplicando Transformada Z y factorizando:

$$Y(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}) = X(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}$$

De lo anterior, para una entrada $x(n)$, la salida se puede obtener con la TZ inversa de:

$$Y(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}X(z)$$

Ejemplo. Considere el sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y(n) - y(n-2) = x(n)$$

Determine la salida cuando $x(n) = u(n)$. Aplicando TZ:

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}X(z) = \frac{z^2}{z^2-1}X(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

De ejemplos anteriores:

$$y(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right]u(n)$$

S. de Fourier para señales continuas

Una señal continua periódica con perioro T_p y frecuencia fundamental $F_0 = \frac{1}{T_p}$ se puede representar mediante la suma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$$

donde los coeficientes c_k se pueden calcular como:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi kF_0 t}$$

Para que la función $x(t)$ se pueda expresar mediante la suma anterior, debe cumplir con las condiciones de Direchlet:

- $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo
- $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo
- $x(t)$ es absolutamente integrable en cualquier periodo:

$$\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty$$

En los puntos donde $x(t)$ es continua, la suma converge al valor de $x(t)$. En las discontinuidades, la suma converge al valor medio de $x(t)$.

S. de Fourier para señales continuas

En general los coeficientes c_k son complejos. Si la señal $x(t)$ es real, c_k y c_{-k} serán complejos conjugados. Expresando c_k en forma polar:

$$c_{\pm k} = |c_k|e^{\pm jk\theta}$$

La serie de Fourier también se puede expresar en términos de senos y cosenos:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi kF_0 t - b_k \sin 2\pi kF_0 t)$$

con

$$a_0 = c_0 \qquad a_k = 2|c_k|\cos\theta_k \qquad b_k = 2|c_k|\sin\theta_k$$

Espectro de densidad de potencia

La potencia media de una señal continua se calcula como:

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)x^*(t)dt$$

Sustituyendo el complejo conjugado con la Serie de Fourier:

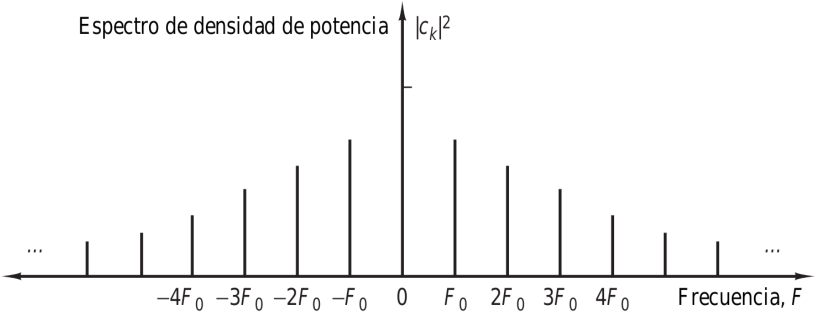
$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi kF_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left[\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}dt\right]$$

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

La igualdad anterior se conoce como relación de Parseval. El valor $|c_k|^2$ representa la potencia media del $k-$ésimo armónico, es decir, la potencia media de una señal periódica es la suma de las potencias medias de cada armónico.

Espectro de densidad de potencia

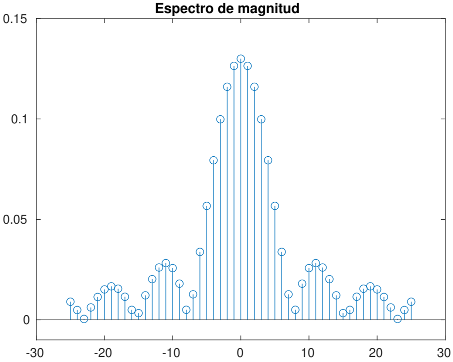
La gráfica de los valores $|c_k|^2$ como función de las frecuencias $kF_0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$, muestra cómo se distribuye la potencia de una señal periódica entre sus diferentes armónicos:

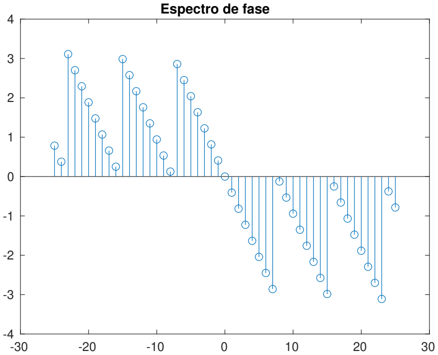


Esta gráfica se conoce como **espectro de densidad de potencia**.

Espectros de magnitud y fase

En lugar de graficar $|c_k|^2$, se pueden graficar la magnitud y fase de los coeficientes c_k:





A estas gráficas se les conoce como **espectro de magnitud** y **espectro de fase**.

- El espectro de magnitud de una señal real, es una función par
- El espectro de fase de una señal real, es una función impar

T de Fourier de señales aperiódicas continuas

De la Serie de Fourier, podemos observar que entre más grande es el periodo T_p, más pequeña es la frecuencia F_0, por lo que en los espectros de magnitud y fase, las frencuencias kF_0 están menos separadas entre sí. Si permitimos que $T_p \rightarrow \infty$, entonces las frencuencias kF_0 se convierten en una nueva variable **continua** de frecuencia f. Los coeficientes de la Serie de Fourier c_k ahora serán una señal continua en función de la nueva variable f:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

La ecuación anterior se conoce como **Transformada de Fourier** y es la generalización de las series de Fourier para señales aperiódicas. La **Transformada Inversa de Fourier** se calcula como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Nótese que la variable continua es la frecuencia en Hertz f, no la frecuencia angular ω.

T de Fourier de señales aperiódicas continuas

En términos de la frencuencia angular ω, la **Transformada de Fourier** se puede obtener como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Y la **Transformada Inversa de Fourier** se puede calcular con:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$$

Las condiciones para que la TF exista son similares a las condiciones para la S de Fourier:

- $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades
- $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos
- $x(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

La tercera condición es una condición sufiente mas no necesaria. Una condición menos restrictiva es que $x(t)$ debe ser una señal de energía, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Espectro de densidad de energía

La energía de una señal continua $x(t)$ se calcula como:

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

Sustituyendo la función $x^*(t)$ con la Transformada Inversa de Fourier:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}df\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)df \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

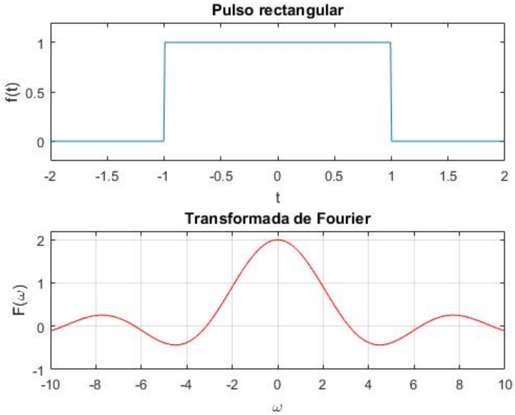
De donde se concluye la **relación de Parseval**:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Es decir, la energía de la señal se conserva en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Pares de transformadas comunes

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si} \quad -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad X(\omega) = 2A\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$



Pares de transformadas comunes

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\sin\omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

Propiedades

Linealidad	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$

S. Fourier para señales discretas periódidas

Una señal discreta $x(n)$ con periodo N, es decir. $x(n) = x(n + kN) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, se puede representar mediante la suma de N funciones exponenciales armónicamente relacionadas:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

donde los coeficientes de Fourier c_k se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

La ecuación anterior, sin el factor $\frac{1}{N}$, se conoce como **Transformada Discreta de Fourier**

Densidad Potencia de S periódicas discretas

La potencia media de una señal periódica discreta se calcula como:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)$$

Sustituyendo por la expresión de la serie discreta de Fourier:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right)$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\left(\sum_{n=1}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\right)$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

La ecuación anterior es la **relación de Parseval** para señales discretas periódicas.

T de Fourier de señales aperiódicas discretas

La Transformada de Fourier de una señal discreta de energía, se define como:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

De la ecuación anterior podemos deducir que:

$$X(\omega + 2\pi k) = \sum_{-\infty}^{infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_{-\infty}^{infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

La principal diferencia con respecto a la T de Fourier de una señal de energía continua, es que el espectro de una señal continua abarca el rango de frencuencias $(-\infty, \infty)$. Pero, el espectro de una señal discreta **es periódico** con periodo 2π.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

La Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de una señal $x(n)$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Tiene la forma de una serie de Fourier. Esto tiene sentido si consideramos que $X(\omega)$ es una función periódica continua, por lo que si $X\omega)$ cumple con las condiciones de Direchlet, entonces se puede expresar con una serie de Fourier, donde **los valores de $x(n)$ son los coeficientes de la serie de Fourier de $X(\omega)$.** Multiplicando por $e^{j\omega m}$ e integrando sobre un periodo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{j\omega m}d\omega$$

El lado derecho de la integral se puede calcular intercambiando el orden de la suma y la integral, pero para que esto sea posible, se debe cumplir que la serie

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n}$$

converja uniformemente a $X(\omega)$ cuando $N \to \infty$, es decir que $X_N(\omega) \to X(\omega)$ cuando $N \to \infty$ para $\forall\omega$.

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto Inversa

Si la convergencia uniforme se cumple, tenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{j\omega m}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega$$

Dado que $e^{j\omega k}$ es una señal periódica, la integral a lo largo de un periodo es siempre cero, a menos que el exponente sea cero, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = \begin{cases} 2\pi x(n) & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

La ecuación anterior es muy parecida a la ecuación para calcular los coeficientes de la serie de Fourier. También, la ecuación anterior se conoce como **Transformada de Fourier de Tiempo Discreto Inversa.**

Densidad de energía de señales aperiódicas

La energía de una señal discreta se calcula como:

$$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

Sustituyendo $x^*(n)$ por su DTFT inversa:

$$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-pi}^{pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-pi}^{pi} X^*(\omega) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right) d\omega$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-pi}^{pi} X^*(\omega) X(\omega) d\omega$$

De donde se obtiene la relación de Parseval:

$$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-pi}^{pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

La T de Fourier y la TZ

La TZ de una señal se calcula como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad \text{con} \qquad r_1 < |z| < r_2$$

Expresando z en forma polar:

$$z = re^{j\omega}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

Es decir, la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto se puede expresar como la Transformada Z evaluada en el círculo unitario:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

Si la RoC de $X(z)$ no contiene al círculo $|z| = 1$, entonces $X(\omega)$ no existe.

Propiedades de simetría de la DTFT

Si $x(n)$ es una señal real y, expresando $X(\omega) = X_R(\omega) + X_I(\omega)$ en sus partes real e imaginaria:

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n \qquad X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n$$

$$X_R(\omega) = X_R(-\omega) \qquad X_I(\omega) = -X_I(-\omega) \qquad X^*(\omega) = X(-\omega)$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \qquad \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$$

Si $x(n)$ es una señal real par, es decir $x(n) = x(-n)$, entonces:

$$X(\omega) = X_R(\omega) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\cos\omega n \qquad x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\cos\omega n d\omega$$

Si $x(n)$ es una señal real impar, es decir $x(n) = -x(-n)$, entonces:

$$X(\omega) = X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\sin\omega n \qquad x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\sin\omega n d\omega$$

Linealidad

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(\omega) \\ a_1x_1(n) + a_2x_2(n) &\longleftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \end{aligned}$$

Desplazamiento temporal

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ x_1(n-k) &\longleftrightarrow e^{-j\omega k}X_1(\omega) \end{aligned}$$

Inversión temporal

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ x_1(-n) &\longleftrightarrow X_1(-\omega) \end{aligned}$$

Convolución

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(\omega) \\ x_1(n) * x_2(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \end{aligned}$$

Correlación

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(\omega) \\ r_{x_1x_2}(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(-\omega) \end{aligned}$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega) \\ e^{j\omega_0 n}x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

Propiedades de la DTFT

Modulación

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)\\
x_1(n) cos \omega_0 n &\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X_1(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$

Teorema de Parseval

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)\\
x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(\omega)\\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega
\end{aligned}
$$

Multiplicación en el tiempo

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)\\
x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(\omega)\\
x_1(n)x_2(n) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda
\end{aligned}
$$

Diferenciación en la frecuencia

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(\omega)\\
nx_1(n) &\longleftrightarrow j\frac{dX(\omega)}{d\omega}
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier

Dada una señal discreta periódica $x(n)$ con periodo N, la Transformada Discreta de Fourier se define como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

La señal $x(n)$ puede recuperarse a partir de $X(k)$ mediante la Transformada Discreta de Fourier Inversa

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Ejemplo: Dada la señal $x(n) = \{1, 6, 2, 8\}$ la DFT está dada por:

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)e^{j\frac{2\pi}{N}(0)(0)} + x(1)e^{j\frac{2\pi}{N}(0)(1)} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{N}(0)(2)} + x(3)e^{j\frac{2\pi}{N}(0)(3)} = 1 + 6 + 2 + 8 = 17 \\
X(1) &= x(0)e^{j\frac{2\pi}{N}(1)(0)} + x(1)e^{j\frac{2\pi}{N}(1)(1)} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{N}(1)(2)} + x(3)e^{j\frac{2\pi}{N}(1)(3)} = 1 - 6j - 2 + 8j = -1 + 2j \\
X(2) &= x(0)e^{j\frac{2\pi}{N}(2)(0)} + x(1)e^{j\frac{2\pi}{N}(2)(1)} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{N}(2)(2)} + x(3)e^{j\frac{2\pi}{N}(2)(3)} = 1 - 6 + 2 - 8 = -11 \\
X(3) &= x(0)e^{j\frac{2\pi}{N}(3)(0)} + x(1)e^{j\frac{2\pi}{N}(3)(1)} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{N}(3)(2)} + x(3)e^{j\frac{2\pi}{N}(3)(3)} = 1 + 6j - 2 - 8j = -1 - 2j
\end{aligned}$$

$$X(k) = \{17, -1 + 2j, -11, -1 - 2j\}$$

La DFT como una transformación lineal

Si definimos una nueva variable W_N a la que llamaremos *factor Twiddle de N puntos*

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Entonces la DFT de la señal anterior se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^0 + x(2)W_N^0 + x(3)W_N^0 \\
X(1) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^1 + x(2)W_N^2 + x(3)W_N^3 \\
X(2) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^2 + x(2)W_N^4 + x(3)W_N^6 \\
X(3) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^3 + x(2)W_N^6 + x(3)W_N^9
\end{aligned}$$

Es decir, la DFT se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ & & \ddots & & \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

La DFT como transformación lineal

Es decir, la DFT se puede expresar como:

$$X_N = W_N x_N$$

donde X_N es el vector de valores de la DFT $X(k)$, x_N es el vector con las muestras de la señal en el tiempo, y $W_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es la matriz compuesta por los factores Twiddle que tiene las siguientes propiedades:

- Es una matriz simétrica
- Es una matriz no singular, es decir, existe la inversa W_N^{-1}
- Es una matriz ortogonal, es decir, se cumple que

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W^*$$

Por lo tanto, la DFT Inversa se puede calcular como:

$$x(n) = \frac{1}{N} W_N^* X(k)$$

La DFT y la DTFT

Considere una señal $x(n)$ **aperiódica de energía finita** con Transformada de Fourier $X(\omega)$. Si se toman N muestras de $X(\omega)$ a lo largo de un periodo, es decir, $\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0, 1, 2, ..., N-1$, entonces los valores

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

son los valores de la DFT de la secuencia **periódica de periodo N** dada por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

La secuencia de duración finita:

$$\hat{x}(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

será igual a $x(n)$ sólo si $x(n)$ tiene duración finita $L \leq N$.

La DFT y la TZ

Considere una señal $x(n)$ con Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

y una región de convergencia que contiene al círculo unitario. Si se toman N muestras equidistantes de $X(z)$ sobre el círculo unitario

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j2\pi kn/N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

La expresión anterior es igual a la DTFT $X(\omega)$ evaluada en $\omega_k = 2\pi k/N,\ k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Si $x(n)$ es de duración finita de longitud $L \leq N$, entonces $x(n)$ puede recuperarse a partir de su DFT de N puntos. Por lo tanto, $X(z)$ puede expresarse en términos de $X(k)$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]z^{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn}z^{-1}\right)^{n}$$

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-e^{j2\pi kn/N}z^{-1}}$$

DFT y serie de Fourier de una señal continua

Suponiendo una señal continua periódica $x_a(t)$ con frecuencia fundamental $F_0 = 1/T_0$ y serie de Fourier

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty} \infty c_k e^{j2\pi k t F_0}$$

Si $x_a(t)$ se muestrea a una frecuencia $F_s = 1/T_s = N/T_0$ se obtiene la secuencia discreta:

$$x(n) = x_a(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 n T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} \right] e^{j2\pi kn/N}$$

La expresión anterior tiene la forma de ina DFT Inversa, donde

$$X(k) = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN} = N\hat{c}_k$$

con

$$\hat{c}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-lN}$$

Es decir, la DFT de la señal periódica $x(n)$, resultado de muestrear $x_a(t)$ con una frecuencia de muestreo N veces mayor que F_0, es la secuencia $\hat{c}_k$ que es una versión con *aliasing* de los coeficientes c_k de la serie de Fourier de $x_a(t)$.

Propiedades de la DFT

Periodicidad

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n+N) \\ X(k) &= X(k+N) \end{aligned}$$

Linealidad

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(k) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(k) \\ a_1x_1(n) + a_2x_2(n) &\longleftrightarrow a_1X_1(k) + a_2X_2(k) \end{aligned}$$

Simetría

Si $x(n) \in \mathbb{R}$ con DFT $X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$

$$\begin{aligned} X_R(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn \\ X_I(k) &= -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn \end{aligned}$$

Simetría

$$|X(k)| = |X(-k)| \qquad \angle X(k) = -\angle X(-k)$$

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k)$$

Si $x(n)$ es par:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn$$

Si $x(n)$ es impar:

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn$$

La simetría se da siempre alrededor de $N/2$

Convolución circular

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(k) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(k) \\ x_1(n) \circledast x_2(n) &\longleftrightarrow X_1(k)X_2(k) \end{aligned}$$

donde $\circledast$ denota la Convolución circular de N puntos.

Multiplicación en el tiempo

$$\begin{aligned} x_1(n) &\longleftrightarrow X_1(k) \\ x_2(n) &\longleftrightarrow X_2(k) \\ x_1(n)x_2(n) &\longleftrightarrow X_1(k) \circledast X_2(k) \end{aligned}$$

Inversión temporal

$$x(-n) = x(N-n) \longleftrightarrow X(-k) = X(N-k)$$

Desplazamiento circular en el tiempo

$$x(n-l) \longleftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = X(k)W_N^{kl}$$

Desplazamiento circular en la frecuencia

$$x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}ln} = x(n)W_N^{-nl} \longleftrightarrow X(k-l)$$

Correlación circular

$$\hat{r}_{xy}(n) \longleftrightarrow X(k)Y^*(k)$$

donde $\hat{r}_{xy}$ denota la correlación circular:

$$\hat{r}_{xy}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(l-n)$$

Propiedades de la DFT

Teorema de Parseval

Sean dos señales $x(n)$ y $y(n)$ con DFTs $X(k)$ y $Y(k)$ respectivamente. Entonces:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum k = 0^{N-1}X(k)Y^*(k)$$

Si $x(n) = y(n)$, la expresión anterior se reduce a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum k = 0^{N-1}|X(k)|^2$$

que establece que la energía de una señal se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.